17016

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / **Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

01	
S	II

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. $ABCD$ යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. X යනු $\angle ABD = \angle CBX$ වන පරිදි AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $AX = \dfrac{AB \, . \, CD}{BD}$ බව පෙන්වන්න. එනයින්,

$$AD \, . \, CB + AB \, . \, CD = AC \, . \, BD$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයෙහි පරිවෘත්තයේ BC චාපය මත P පිහිටයි නම්, $PA = PB + PC$ බව සාධනය කරන්න.

විලෝම වශයෙන්, A, B, C යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ වුවිට $PA = PB + PC$ නම්, P හි පථය ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ චාපයක් බව සාධනය කරන්න.

2. $OABC$ චතුස්තලයෙහි, OB ට සහ OC ට OA ලම්බ වන අතර $OC = BC = a$, $OA = OB = \sqrt{2}\, a$. OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන K හරහා, OCB ත්‍රිකෝණයෙහි CD මධ්‍යස්ථයට සමාන්තර වන සේ KL රේඛාව අඳිනු ලබන්නේ L හිදී OB ඡේදනය වන සේ ය. N හි දී AB ඡේදනය වන සේ OAB ත්‍රිකෝණයේ OP මධ්‍යස්ථයට සමාන්තරව L හරහා LN රේඛාව අඳිනු ලැබේ.

K, L, N හරහා යන α තලය AB ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

A ශීර්ෂයේ සිට α ට ඇති දුර සොයන්න.

α තලයත් AC ත් M හි දී ඡේදනය වෙයි නම් M මගින් AC රේඛාව $5 : 1$ අනුපාතයෙන් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

3. $lx + my + n = 0$ සරල රේඛාව මත $P \equiv (\alpha \, , \, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක A, B, C ශීර්ෂ පිහිටා ඇත්තේ පිළිවෙලින් $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ රේඛා මත ය. AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $3y + x - 18 = 0$ වේ. BC රේඛාව $y + x = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර ය. ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ ලබාගන්න.

4. (a) $r = 2a \cos \theta$ ධ්‍රැවක සමීකරණයෙන් O ධ්‍රැවය හරහා යන අරය a සහිත වෘත්තයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය කුමක් ද?

$r = 2a \cos (\theta - \alpha)$ සහ $r = 2b \sin (\theta - \alpha)$ මගින් සෘජු කෝණිව ඡේදනය වන වෘත්ත දෙකක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න ; මෙහි a, b, α නියත වේ.

(b)
$$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$S_2 \equiv (x-5)^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$S_3 \equiv (x-5)^2 + (y-12)^2 - 100 = 0$$

වෘත්ත තුන බාහිර ව එකිනෙක ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. එම වෘත්තවල සුළු චාප මගින් අන්තර්ගත වන ක්ෂේත්‍රඵලය $\dfrac{1}{2}(60 - 52\pi + 91\alpha)$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right)$

5. (a) අරය r සහිත S වෘත්තයක් x අක්ෂයත් y අක්ෂයත් ස්පර්ශ කරයි. S හි සමීකරණය සොයන්න. එවැනි වෘත්ත කොපමණ සංඛ්‍යාවක් ඇඳිය හැකි ද?

ඛණ්ඩාංක අක්ෂ දෙකම ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $(2, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූ ද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ ලබා ගන්න.

(b) $x^2+y^2 = 25$ වෘත්තයේත් $y - x + 1 = 0$ රේඛාවේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා S, S' වෘත්ත දෙකක් අඳිනු ලැබ ඇත්තේ S සහ S' වෘත්ත දෙකම $x + y - 25 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන පරිදි ය. S සහ S' හි සමීකරණ සොයන්න.

S සහ S' හි පොදු ස්පර්ශක ඡේදනය නොවන බව ද පෙන්වන්න.

6. $P\,(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $ty = x + at^2$ බව පෙන්වා P හි දී අභිලම්බයේ සමීකරණය ලියන්න.

$P_1(4t_1^2, 8t_1)$ සහ $P_2(4t_2^2, 8t_2)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා $y^2 = 16x$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශක T හි දී හමුවේ. පරාවලයට P_1 සහ P_2 හි දී ඇඳි අභිලම්බ N හි දී හමුවේ. P_1 සහ P_2 හි ස්පර්ශක ලම්බ වේ නම්,

(i) P_1 විචලනය වන විට, T හි පථය $x + 4 = 0$ සරල රේඛාව බව පෙන්වන්න.

(ii) TN රේඛාව x අක්ෂයට සමාන්තර බව ද P_1 විචලනය වන විට N හි පථය $y^2 = 4(x-12)$ පරාවලය බව ද පෙන්වන්න.

7. ඉලිප්සයක්, $25x^2 + 16y^2 = 400k^2$ සමීකරණයෙන් දී ඇත ; මෙහි k යනු ධන නියතයකි. එහි විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා, නාභීන් $S \equiv (0,3k)$ සහ $S' \equiv (0, -3k)$ ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

$P\left(\frac{16k}{5}, -3k\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකය, A හි දී x අක්ෂය ද B හි දී y අක්ෂය ද ඡේදනය කරන අතර P හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි අභිලම්බය C හි දී x අක්ෂය ද D හි දී y අක්ෂය ද ඡේදනය කරනු ලබයි.

A, B, C, D හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කරන්න. AOB ත්‍රිකෝණයේ ක්ෂේත්‍රඵලය, COD ත්‍රිකෝණයෙහි ක්ෂේත්‍රඵලය මෙන් $\left(\frac{25}{9}\right)^3$ ගුණයක් බව පෙන්වන්න.

8. බහුවලයක සමීකරණය $xy = c^2$ වේ ; මෙහි c ධන නියතයකි. එහි විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා, $x > 0$ පෙදෙසෙහි පිහිටන S නාභියෙහි ඛණ්ඩාංක ලබා ගන්න.

(i) $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී බහුවලයට ඇඳි අභිලම්බය, Q ලක්ෂ්‍යයේ දී $y = x$ රේඛාව හමුවෙයි. PQ හි දිග සොයා, එය $c\sqrt{2}$ ට වැඩි බව පෙන්වන්න.

(ii) $y > 0$ පෙදෙසෙහි පවතින බහුවලයේ ශාඛාවට බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට අඳිනු ලබන ස්පර්ශක S හි දී සමාන කෝණ ආපාතනය කරනු ලබන බව පෙන්වන්න.

9. (a) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1-2\cos A\cos B\cos C$$

බව සාධනය කරන්න.

(b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ නම්,

$$\tan B = \frac{1-2\tan A - \tan^2 A}{1+2\tan A - \tan^2 A}$$

බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{\pi}{8}$ යන්න, $x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් බව ද එහි අගය $\sqrt{2}-1$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

අනෙක් මූලය $\tan\theta$ නම්, $(0, \pi)$ පරාසයෙහි පිහිටි θ සොයන්න.

10. (a) (i) $\sqrt{3}\,(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

සමීකරණ විසඳන්න.

(b)

$$2 \sin y \, \sin (x + y) = \cos x$$
$$\cot x + \sin 2y = \sin 2x$$

සමීකරණ x සහ y සපුරාලයි.

ඉහත පළමුවැනි සමීකරණය $\sin x \, \sin 2y = \cos x \, \cos 2y$ යන ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ y හි සමීකරණයක් ලබා ගන්න. ඒ නයින් $0 \leq x \leq \pi$ සහ $0 \leq y \leq \pi$ විට x ද y ද සඳහා ඉහත සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

11. $x_1, x_2, \dots, x_n$ යනු සංගහනයකින් ගත් නිරීක්ෂණ n වේ. නියැදි මධ්‍යනාය $\bar{x}$ සහ නියැදි විචලතාව S_x^2 වේ.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{සහ} \quad S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ලෙස අර්ථ දක්වේ.}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

ආකාරයෙන් S_x^2 ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

$y_1, y_2, \dots, y_m$ යනු දෙවැනි සංගහනයකින් ගත් නිරීක්ෂණ m ද $\bar{y}$ සහ S_y^2 යනු පිළිවෙලින් නියැදි මධ්‍යනාය සහ නියැදි විචලතාව ද යැයි ගනිමු. $\bar{z}$ සහ S_z^2 යනු සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යනාය සහ නියැදි විචලතාව නම්

(i) $\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m}$

(ii) $\frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m} = \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} - \bar{z}^2$

(iii) $\frac{n S_x^2 + m S_y^2}{n + m} = \frac{1}{n + m}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2\right\} - \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m}$

(iv) $S_z^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n + m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m}$

බව පෙන්වන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යයන් 100 කට සහ සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යාවන් 50 කට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙන ලදී. ඔවුන් ලබාගත් ලකුණුවලින් ගණනය කරන ලද තොරතුරු පහත දැක්වෙන වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

	අපේක්ෂක සංඛ්‍යාව	නියැදි මධ්‍යනාය	නියැදි විචලතාව
ශිෂ්‍යයන්	100	41	9
ශිෂ්‍යාවන්	50	38	4

සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යනාය සහ නියැදි විචලතාව ගණනය කරන්න.

පුද්ගලික ලකුණුවල වැඩි විචල්‍යතාවක් ඇත්තේ ශිෂ්‍යයන් අතරේ ද නැතහොත් ශිෂ්‍යාවන් අතරේ ද?

(විචල්‍යතා සංගුණකය = $\frac{S_x}{\bar{x}}$.)

12. (*a*) A සහ B සිද්ධීන් දෙකක් ස්වායත්ත යැයි කියනු ලබන්නේ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ම නම් පමණක් වේ.

A සහ B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම් ඒවායේ අනුපූරක සිද්ධීන් ද එකිනෙකට ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

[$(A \cup B)' = A' \cap B'$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය. මෙහි යන්නෙන් අනුපූරක සිද්ධිය හැඳින්වේ.]

කිසි යම් ආකාරයක ඕනෑ ම තරඟ වාරයක් A ක්‍රීඩකයා විසින් දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.70 කි. තරඟ වාර තුනකින් යුත් එවැනි ක්‍රීඩාවකට A ඉදිරිපත් වෙයි. යටත් පිරිසෙයින් ක්‍රීඩාවේ එක තරඟ වාරයක් වත් A විසින් දිනා ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා වර්ගයක ඕනෑම සෛලයක් කිසියම් පරීක්ෂණයකට භාජනය කළ විට, එක්කෝ a සම්භාවිතාවක් සහිත ව මිය යයි, නැතහොත් 0.25 සම්භාවිතාවක් සහිත ව නොකඩවා ජීවත් වෙයි එසේත් නැතහොත් b සම්භාවිතාවක් සහිතව සමාන සෛල දෙකකට බෙදෙයි. එවැනි සෛලයක් එම පරීක්ෂණයට භාජනය කළ විට, සජීවී සෛල සංඛ්‍යාව X මගින් හැඳින්වේ. සෛලවල මධ්‍යන්‍ය සංඛ්‍යාව වන $E(X)$, 1.05 ට සමාන නම්, a සහ b හි අගයයන් පිළිවෙලින් 0.35 සහ 0.40 බව පෙන්වන්න.

එවැනි සෛල දෙකක් එකම පරීක්ෂණයකට භාජනය කරනු ලැබූ විට, ඉතිරි වන සෛල සංඛ්‍යාව Y යන්නෙන් හැඳින්වේ නම්, Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය

$Y = y$	0	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0.1225	0.275	0.3425	0.20	0.16

බව පෙන්වන්න.

Y හි මධ්‍යන්‍යය ද විචලතාව ද සොයන්න.